

Syarat Perlu dan Cukup Suatu Fungsi Bernilai Vektor Bervariasi Terbatas pada Suatu Sel

Manuharawati¹, Dwi Nur Yuniarti²

¹Jurusan Matematika-FMIPA Universitas Negeri Surabaya, manuhara1@yahoo.co.id

²Jurusan Matematika-FMIPA Universitas Negeri Surabaya, niyan_zalpha@yahoo.com

ABSTRACT

Let X is locally compact metric space and Y is Banach space. Let R_X is order relation on X and R_Y is order relation on Y such that (X, R_X) and (Y, R_Y) are lattice. We want to prove that function $f: X \rightarrow Y$ is bounded variation on cell $E \subset X$ if only if f monotone and bounded on E .

Key Words : Bounded variation, lattice, Banach space, locally compact metric space

ABSTRAK

Misalkan X adalah ruang metrik kompak lokal dan Y merupakan ruang Banach. Jika R_X dan R_Y berturut-turut merupakan relasi urutan pada X dan Y sehingga (X, R_X) dan (Y, R_Y) masing-masing merupakan lattice, maka akan dibuktikan bahwa fungsi $f: X \rightarrow Y$ bervariasi terbatas pada sel $E \subset X$ jika dan hanya jika f monoton dan terbatas pada E .

Kata kunci: Bervariasi terbatas, lattice, ruang Banach, ruang metrik kompak lokal,

1. Pendahuluan

Banyak peneliti matematika yang telah mengkaji tentang sifat-sifat fungsi bervariasi terbatas, seperti Darmawijaya (1990, 2003), Indrati (2002), dan Lee (1989). Darmawijaya dan Lee membahas fungsi bernilai real dengan domain merupakan sel di dalam $\mathbb{R}$, sedangkan Indrati membahas fungsi bernilai real dengan domain merupakan sel di dalam $\mathbb{R}^n$ dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Karena $\mathbb{R}$ maupun $\mathbb{R}^n$ merupakan lattice relative terhadap operasi urutan $\leq$ yang telah didefinisikan dalam Bartle dan Sherbert (2000) serta Indrati (2002), maka dalam makalah ini dikaji tentang sifat-sifat fungsi bervariasi terbatas dengan domain merupakan sel di dalam lattice (X, R_X) dan kodomainnya adalah lattice (Y, R_Y) dengan X dan Y berturut-turut merupakan ruang metrik kompak lokal dan ruang Banach yang mana $\mathbb{R}$ maupun $\mathbb{R}^n$ merupakan kejadian khususnya.

2. Landasan Teori

Dalam bagian ini disajikan konsep dan teorema-teorema yang digunakan dalam pembahasan.

2.1 Ruang Metrik Kompak Lokal

Ruang metrik (X, d) dikatakan kompak lokal (*locally compact*) jika untuk setiap titik $p \in X$ mempunyai kitaran dengan *closure* yang kompak (Paty, 1993: 142).

Menurut Paty (Paty, 1993: 142), setiap ruang metrik kompak merupakan ruang metrik kompak lokal (Paty, 1993: 142), tetapi kebalikannya tidak berlaku, dalam arti bahwa setiap ruang metrik kompak lokal belum tentu merupakan ruang metrik kompak. Sebagai contoh ruang metrik usual $\mathbb{R}$, adalah ruang metrik kompak lokal, tetapi $\mathbb{R}$ terhadap metrik usual bukan ruang metrik kompak (Bartle and Sherbet, 2000: 321). Selanjutnya dapat dibuktikan bahwa: Ruang metrik (X, d) adalah kompak lokal jika dan hanya jika setiap $p \in X$ dan setiap kitaran V dari p terdapat kitaran W yang memuat p sehingga $cl(W)$ kompak dan $cl(W) \subset V$ (Paty, 1993: 143).

2.2 Sistem Interval

Untuk membangun integral jenis Riemann, khususnya integral Henstock, perlu adanya interval di dalam daerah asal fungsinya. Manuharawati (2002) telah membangun sistem interval di dalam ruang metrik kompak lokal yang merupakan abstraksi dari sistem interval pada $\mathbb{R}^n$ sebagai berikut.

Di dalam ruang metrik kompak lokal (X, d) . Koleksi $S \subset 2^X$ yang tidak kosong disebut **sistem interval** (*system of intervals*) jika memenuhi:

- (i) Untuk setiap $p \in X, \{p\} \in S$,

- (ii) untuk setiap $p \in X$, jika $cl(N(p, r))$ kompak, maka $N(p, r) \in S$,
- (iii) jika $A \in S$, maka A konveks, $cl(A)$ kompak, $cl(A) \in S$, dan $int(A) \in S$,
- (iv) untuk setiap $A, B \in S, A \cap B \in S$,
- (v) untuk setiap $A, B \in S$, terdapat $C_i \in S, i = 1, 2, 3, \dots, n$ dengan $\{C_i, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ tidak tumpang tindih dan

$$A - B = \bigcup_{i=1}^n C_i.$$

Jika S merupakan sistem interval di dalam ruang metrik (X, d) , setiap anggota S disebut **interval**. Interval $A \in S$ dikatakan **degenerate** jika $int(A) = \emptyset$ dan **nondegenerate** jika $int(A) \neq \emptyset$. **Sel** adalah interval kompak yang nondegenerate. Himpunan $A \subset X$ disebut **himpunan elementer** jika A dapat disajikan sebagai gabungan sebanyak hingga interval-interval. Jadi A himpunan elementer jika dan hanya jika terdapat $C_i \in S, i = 1, 2, 3, \dots, n$ sehingga

$$A = \bigcup_{i=1}^n C_i.$$

(Manuharawati, 2002).

2.3 Ruang Banach

Diberikan ruang vektor Y atas lapangan K . Suatu fungsi $\|\cdot\|$ dari ruang Vektor Y (atas lapangan K) ke $\mathbb{R}$ disebut norm pada Y jika untuk setiap $x, y \in Y$ dan setiap $\alpha \in K$ memenuhi:

- (i) $\|x\| \geq 0$,
- (ii) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \mathbf{0}$, (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ruang vektor Y yang dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorm. Setiap anggota dari ruang vektor, khususnya ruang bernorma disebut vektor.

Dari pengertian tersebut dapat dibuktikan sifat norm (Brown and Page, 1970: 85, 90) sebagai berikut. Jika $(Y, \|\cdot\|)$ ruang bernorma, maka untuk setiap $x, y \in Y$ berlaku:

- (i) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = \mathbf{0}$
- (ii) $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.

Selanjutnya jika $(Y, \|\cdot\|)$ ruang bernorma maka $d: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = \|x - y\|$, disebut metrik yang dibangkitkan oleh norm $\|\cdot\|$.

Ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap, yaitu setiap barisan Cauchy di dalamnya merupakan barisan konvergen.

2.4 Lattice

Jika S adalah sebarang himpunan tidak kosong dan R_S merupakan relasi pada S , maka S yang dilengkapi dengan R_S disebut himpunan terurut parsial (*partially order set*) dan dinotasikan dengan (S, R_S) jika untuk setiap $x, y, z \in S$ memenuhi:

- (i) $x R_S x$
- (ii) Jika $x R_S y$ dan $y R_S x$, maka $x = y$

(iii) Jika $xR_S y$ dan $yR_S z$, maka $xR_S z$
Jika (S, R_S) himpunan terurut parsial, elemen $x, y \in S$ dikatakan komparabel jika memenuhi $xR_S x$ atau $xR_S y$, dan jika tidak demikian disebut tidak komparabel.
Himpunan terurut parsial (S, R_S) disebut lattice jika untuk setiap $x, y \in S$, $\supremum\{x, y\}$ dan $\infimum\{x, y\}$ ada. $\supremum\{x, y\} = \sup\{x, y\}$ dinotasikan dengan $x \vee y$ dan $\infimum\{x, y\} = \inf\{x, y\}$ dinotasikan dengan $x \wedge y$.

3. Pembahasan

3.1 Fungsi Bervariasi Terbatas

Misalkan X adalah ruang metrik kompak lokal, Y adalah ruang bernorma, E adalah sel di dalam X , $\mathcal{I}(E)$ adalah himpunan semua interval-interval bagian dari E beserta gabungannya.

Definisi 3.1: Diberikan sel $E \subset X$ dan fungsi $f: E \rightarrow Y$. Osilasi fungsi f pada $I \in \mathcal{I}(E)$, dinotasikan dengan $\omega(f, I)$ yang didefinisikan sebagai
$$\omega(f, I) = \sup\{\|f(x) - f(y)\|; x, y \in I\}$$

Definisi 3.2: Diberikan sel $E \subset X$. Fungsi $f: E \rightarrow Y$ dikatakan bervariasi terbatas pada E jika terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga untuk setiap partisi $\mathcal{P} = \{I_i: i = 1, 2, \dots, n\}$ pada E berlaku

$$\mathcal{P} \sum \omega(f, I) = \sum_{i=1}^n \omega(f, I_i) \leq M.$$

Bilangan $V(f, E)$ yang didefinisikan sebagai
$$V(f, E) = \sup\left\{\mathcal{P} \sum \omega(f, I): \mathcal{P} \text{ adalah partisi pada } E\right\}$$

disebut variasi fungsi f pada E .

Definisi 3.3: Diberikan sel $E \subset X$. Fungsi $f: E \rightarrow Y$ dikatakan terbatas pada E jika terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga untuk setiap $x \in E$ berlaku
$$\|f(x)\| \leq M.$$

Hubungan fungsi bervariasi terbatas dan fungsi terbatas dituangkan kedalam teorema berikut.

Teorema 3.1: Diberikan sel $E \subset X$. Fungsi $f: E \rightarrow Y$. Jika f bervariasi terbatas pada E maka f terbatas pada E .

Bukti: Karena fungsi $f: E \rightarrow Y$ bervariasi terbatas pada E , maka terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga untuk setiap partisi $\mathcal{P} = \{I_i: i = 1, 2, \dots, n\}$ pada E berlaku

$$\mathcal{P} \sum \omega(f, I) = \sum_{i=1}^n \omega(f, I_i) \leq M. \quad (3.1)$$

Diambil sebarang $x \in E$. Berdasarkan (3.1), maka ada $I \in \mathcal{P}$ sehingga $x \in I$ dan

$$\omega(f, I) = \sup\{\|f(x) - f(y)\|; y \in I\} \leq M$$

Akibatnya, untuk suatu $y \in I$, berlaku

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M$$

$$\|f(x)\| \leq \|y\| + M.$$

Karena $\|y\| \geq 0$, maka jika dibentuk

$$L = \|y\| + M$$

diperoleh

(i) L merupakan bilangan real dan $L > 0$

(ii) Untuk setiap $x \in E$ berlaku $\|x\| \leq L$.

Berdasarkan Definisi 3.3, f terbatas pada E . ■

Teorema 3.2: Diberikan sel $E \subset X$. Fungsi $f: E \rightarrow Y$. Jika f bervariasi terbatas pada E maka f bervariasi terbatas pada setiap sel $I \subset E$.

Bukti: Karena fungsi $f: E \rightarrow Y$ bervariasi terbatas pada E , maka terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga berlaku (3.1). Diambil sebarang sel $I \subset E$. Jika $\mathcal{Q}_1 = \{J_j: j = 1, 2, \dots, k\}$ adalah sebarang partisi pada I dan $\mathcal{Q}_2 = \{L_j: j = 1, 2, \dots, l\}$ adalah sebarang partisi pada $cl(E - I)$, maka $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2$ merupakan partisi pada E . Oleh karena itu diperoleh

$$\mathcal{Q}_1 \sum \omega(f, I) \leq \sum_{j=1}^k \omega(f, J_j) + \sum_{j=1}^l \omega(f, L_j)$$

Berdasarkan (3.1), diperoleh

$$\sum_{j=1}^k \omega(f, J_j) + \sum_{j=1}^l \omega(f, L_j) \leq M.$$

Akibatnya

$$\mathcal{Q}_1 \sum \omega(f, I) \leq M.$$

Menurut Definisi 3.2, fungsi f bervariasi terbatas pada sel I . ■

Teorema berikut menyatakan bahwa himpunan semua fungsi bervariasi terbatas pada sel E merupakan ruang linear.

Teorema 3.3: Diberikan sel $E \subset X$. Fungsi $f, g: E \rightarrow Y$. Jika f dan g bervariasi terbatas pada E maka untuk sebarang bilangan real k , berlaku kf dan $f + g$ masing-masing merupakan fungsi bervariasi terbatas pada E .

Bukti: Karena fungsi f dan g bervariasi terbatas pada E , maka terdapat bilangan real $M \geq 0$ dan $N \geq 0$ sehingga

$$\mathcal{P} \sum \omega(f, I) = \sum_{i=1}^n \omega(f, I_i) \leq M.$$

dan

$$\mathcal{P} \sum \omega(f, I) = \sum_{i=1}^n \omega(f, I_i) \leq N.$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \sum \omega(kf, I) &= \sum_{i=1}^n \omega(kf, I_i) \\ &= |k| \sum_{i=1}^n \omega(f, I_i) \leq |k|M = M^*. \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \sum \omega(f + g, I) &= \sum_{i=1}^n \omega(f + g, I_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \omega(f, I_i) + \sum_{i=1}^n \omega(g, I_i) \leq M + N = N^*. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa kf dan $f + g$ masing-masing merupakan fungsi bervariasi terbatas pada E . ■

Teorema 3.4. Jika fungsi $f: X \rightarrow Y$ terbatas pada sel $E \subset X$ maka fungsi f bervariasi terbatas pada E .

Bukti: Karena fungsi f terbatas pada E , maka ada bilangan real $M > 0$ sehingga untuk setiap $x \in E$, berlaku

$$\|f(x)\| \leq M. \quad (3.2)$$

Jika $\mathcal{P} = \{I_i: i = 1, 2, \dots, n\}$ adalah sebarang partisi pada E , maka

$$\omega(f, I) = \sup\{\|f(x) - f(y)\|; x, y \in I\} \leq 2M$$

dan

$$\mathcal{P} \sum \omega(f, I) = \sum_{i=1}^n \omega(f, I_i) \leq 2nM.$$

Jadi fungsi f bervariasi terbatas pada sel E . ■

Selanjutnya jika R_X, R_Y berturut-turut merupakan relasi pada X dan Y sehingga (X, R_X) dan (Y, R_Y) merupakan lattice, maka dengan mudah dapat dibuktikan Teorema 3.5. Sebelum membuktikan teorema tersebut didefinisikan fungsi monoton sebagai berikut.

Definisi 3.4: Fungsi $f: X \rightarrow Y$ dikatakan monoton naik pada $E \subset X$ jika untuk setiap $x, y \in E$ dengan $xR_X y$ berakibat $f(x)R_Y f(y)$.

Teorema 3.5: Diberikan ruang metrik kompak lokal X dan ruang Banach Y beserta relasi R_X dan R_Y sehingga (X, R_X) dan (Y, R_Y) masing-masing merupakan lattice. Jika fungsi $f: X \rightarrow Y$ monoton

pada sel E maka fungsi f bervariasi terbatas pada E .

Bukti: Misal $\mathcal{P} = \{I_i: i = 1, 2, \dots, n\}$ adalah sebarang partisi pada E . Karena (Y, R_Y) merupakan lattice, maka untuk setiap $x, y \in I_i$, $\sup\{f(x), f(y)\}$ ada. Misal

$$a_i = \sup\{f(x), f(y): x, y \in I_i\}.$$

Karena Y ruang Banach, maka $a_i \in Y$. Oleh karena itu dengan mengingat (Y, R_Y) merupakan lattice, diperoleh

$$\sup\{a_i: I_i \in \mathcal{P}\} \text{ ada}$$

Karena fungsi f monoton pada E , maka ada bilangan real $M \geq 0$ sehingga

$$\|a_i\| \leq M.$$

Akibatnya

$$\omega(f, I) = \sup\{\|f(x) - f(y)\|; x, y \in I\} \leq 2M$$

dan

$$\mathcal{P} \sum \omega(f, I) = \sum_{i=1}^n \omega(f, I_i) \leq 2nM.$$

Jadi fungsi f bervariasi terbatas pada sel E . ■

4. Daftar Pustaka

- Barttle, R.G., 2000, "Introduction to Real Analysis", John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Brown, A.L. and Page, A., 1970, "Elements of Functional Analysis", Van Nostrand Reinhold Company, New York.
- Darmawijaya, S., 1990, A Fundamental Integral on the Real Line, Proc. Asian Math Conf. 1990, 80-90, World Scientific Publishing Company, Singapore.
- Darmawijaya, S., 2003. On Bounded Interval Functions. Yogyakarta: Proceeding SEAMS GMU 2003.
- Indrati, R.Ch., 2002, Integral Henstock Kurzweil di Ruang Euclide Berdisertasiemensi-n, Disertasi, PPs UGM, Yogyakarta.
- Lee, P.Y., 1989, Lanzhou Lectures On Henstock Integration, Singapore: World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.
- Manuharawati, 2002, Integral henstock di dalam Ruang Metrik Kompak Lokal, Disertasi S3, PPs-UGM, Yogyakarta.

Patty, C.,W., 1993, *Foundation of Topology*, PWS
Publishing Company, Boston.

Nieberg P.M., 1991. *Banach Lattices*. Springer-
Verlag, Berlin Heidelberg.